

ضرب و تقسیم عبارتهای گویا

به نام خدا

آگه فاطرتون باشه ما اوایل کتاب یاد گرفتیم که عددهای گویا رو در هم ضرب کنیم یا بر هم تقسیم کنیم.

برای ضرب عددهای گویا، صورت رو در صورت ضرب می‌کردیم و مخرج رو در مخرج، البته می‌تونستیم قبل از ضرب کردن، صورت و مخرجها رو هم ساده کنیم.

برای تقسیم عددهای گویا به گام اضافه تر انجام میدادیم. اول تقسیم رو به ضرب تبدیل می‌کردیم و بعد ضرب رو انجام میدادیم، یعنی صورت رو در صورت ضرب می‌کردیم و مخرج رو در مخرج.

برای تبدیل تقسیم به ضرب هم گامهای زیر رو انجام می‌دادیم:

۱. کسر اول رو بدون تغییر می‌نوسیم.

۲. تقسیم رو به ضرب تبدیل می‌کنیم.

۳. کسر دوم رو معکوس می‌کنیم.

این مطالبی که گفتیم برای ضرب و تقسیم عددهای گویا بود، اینجا می‌فوییم درباره ضرب و تقسیم عبارتهای گویا صحبت کنیم.

اساس کار ضرب و تقسیم عبارتتهای گویا هم مشابه عددهای گویاست. یعنی:

برای ضرب عبارتتهای گویا، صورت رو در صورت و مخرج رو در مخرج ضرب می‌کنیم.

برای تقسیم عبارتهای گویا، اول تقسیم رو به ضرب تبدیل می‌کنیم و بعد ضرب رو انجام میدیم.

نکته مهمی که در اینجا وجود داره، ساده کردن عبارتهای گویاست، ما عددها رو خیلی راحت می‌تونستیم ساده کنیم چون از دوران ابتدایی ساده کردن کسر رو یاد گرفتیم ولی عبارتهای گویا رو باید به کم بیشتر تمرین کنیم تا بتونیم مهارت پیدا کنیم.

ضرب و تقسیم عبارتهای گویا رو می‌تونیم به دو دسته تقسیم کنیم:

۱. در صورت و مخرج کسرها، جمع و تفریق نداریم.

۲. در صورت و مخرج کسرها، جمع و تفریق داریم.

این دو حالت رو بررسی می‌کنیم:

۱. در صورت و مخرج کسرها جمع و تفریق نداریم.

برای ساده کردن این ضربها از ضرب اعداد تواندار استفاده کنیم.

مثال: ضرب زیر را انجام دهید.

$$\frac{5x^2y^3}{3z^2y^2} \times \frac{6z^3yx^3}{x} =$$

برای مناسبه این عبارت، صورت رو در صورت ضرب می‌کنیم و مخرج رو در مخرج

زمانی که داریم این ضربها رو انجام میدیم باید توجه داشته باشیم که عبارتهای تواندار که

پایه‌های مساوی دارن، در هم ضرب میشن، مثلا x^2 در x^3 ضرب میشه و y^3 در y

عدهای صحیح رو هم در هم ضرب می‌کنیم.

بنابراین داریم:

$$\frac{5 \times 6x^{(2+3)}y^{(3+1)}z^3}{3z^2y^2x} = \frac{30x^5y^4z^3}{3z^2y^2x}$$

حالا باید این عبارت رو ساده کنیم، همونطور که در قسمت ضرب و تقسیم اعداد تواندار یاد گرفتیم، برای ساده کردن این عبارت، به این صورت عمل می‌کنیم؛ برای هر متغیر:

اونی که توانش کمتره رو فط می‌زنیم و اونی که توانش بیشتره، توانش رو منهای توان کوپلتر می‌کنیم.

مثلا الان توی صورت y^4 داریم و توی مخرج y^2 . چون ۲ از ۴ کوپلتره y^2 رو فط می‌زنیم و توان ۴ رو منهای ۲ می‌کنیم، برای بقیه توانها هم به همین صورت، بنابراین داریم:

$$\frac{30x^{(5-1)}y^{(4-2)}z^{(3-2)}}{\cancel{3z^2y^2x}} = 10x^4y^2z$$

۱. در صورت و مخرج کسرها جمع و تفریق داریم.

گام ۱. با استفاده از روشهایی که قبلا یاد گرفتیم (مثل فاکتورگیری یا اتحاد) عبارتها رو تجزیه می‌کنیم و عبارت‌های مشابه در صورت و مخرج رو ساده می‌کنیم.

$$\frac{x-6}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12} =$$

تا جایی که می‌تونیم تجزیه می‌کنیم:

$x - 6$ که تجزیه نمیشه.

$x^2 - 12x + 36$ رو با استفاده از اتحاد مربع ساده می‌کنیم:

$$x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2 = (x - 6)(x - 6)$$

$x^2 - 3x - 18$ رو با استفاده از اتحاد جمله مشترک ساده می‌کنیم:

$$x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3)$$

$x^2 + 7x + 12$ رو با استفاده از اتحاد جمله مشترک ساده می‌کنیم:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$

همه این مقادیر رو جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{x - 6}{(x - 6)(x - 6)} \times \frac{(x - 6)(x + 3)}{(x + 4)(x + 3)} =$$

گام ۲. جملات مشابهی که هم در صورت و هم در مخرج هستند رو با هم ساده می‌کنیم و بعد صورت رو در صورت ضرب می‌کنیم و مخرج رو در مخرج

$$\frac{\cancel{x - 6}}{\cancel{(x - 6)}(x - 6)} \times \frac{\cancel{(x - 6)}\cancel{(x + 3)}}{(x + 4)\cancel{(x + 3)}} = \frac{1}{x + 4}$$

یه مثال دیگه:

حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x + 18} =$$

اول از همه توجه داشته باشید که علامت تقسیم داریم پس باید ابتدا اون رو به ضرب تبدیل کنیم.

برای تبدیل تقسیم به ضرب، کسر اول رو ثابت نگه می‌داریم، تقسیم رو به ضرب تبدیل می‌کنیم و کسر دو^م رو معکوس می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \times \frac{6x + 18}{x^2 + x - 6} =$$

فاب چون در صورت و مخرج جمع و تفریق داریم، پس تا جایی که می‌تونیم جملات رو تجزیه می‌کنیم:

$x^2 - 4x + 4$ تجزیه با اتحاد مربع:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2)$$

$4x^2y - 8xy$ تجزیه با فاکتورگیری:

$$4x^2y - 8xy = 4xy(x - 2)$$

$x^2 + x - 6$ تجزیه با اتحاد جمله مشترک:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

$6x + 18$ تجزیه با فاکتورگیری:

$$6x + 18 = 6(x + 3)$$

حالا این مقادیر رو جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{(x - 2)(x - 2)}{4xy(x - 2)} \times \frac{6(x + 3)}{(x + 3)(x - 2)} =$$

در گام دوم، جملات مشترک در صورت و مخرج رو حذف می‌کنیم:

$$\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-2)}}{4xy\cancel{(x-2)}} \times \frac{6\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}} =$$

هر پی که در صورت باقی‌مونده رو در هم ضرب می‌کنیم و هر پی در مخرج‌مونده در هم:

$$\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-2)}}{4xy\cancel{(x-2)}} \times \frac{6\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}} = \frac{6}{4xy} = \frac{3}{2xy}$$

جمع و تفریق
عبارتهای گویا

ما قبلاً جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها و چند جمله‌ای‌ها رو یاد گرفتیم، در اینجا می‌فویایم جمع و تفریق عبارتهای گویا رو یاد بگیریم.

برای جمع و تفریق عبارتهای گویا چند تا حالت داریم:

حالت اول: مخرج دو عبارت گویا با هم برابره.

حالت دوم: مخرج کسرها برابر نیست ولی در صورتی که مخرجها رو تجزیه کنیم، جملات مشترک بین اونها رو پیدا می‌کنیم:

حالت سوم: حالتی که بعد از تجزیه هر دو مخرج، هیچ عامل مشترکی بین مخرجها وجود ندارد.

دونه دونه این حالتها رو بررسی می‌کنیم:

حالت اول: مخرج دو عبارت گویا با هم برابره.

این ساده‌ترین حالتیه که وجود داره، برای حل این مدلها، مخرج رو می‌نویسیم و صورتها رو با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{x^2 + x}{x - 3} + \frac{2x + 3}{x - 3} =$$

در اینجا مخرجها برابرن، یکی از مخرجها رو می‌نویسیم و صورتها رو با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{x^2 + x}{x - 3} + \frac{2x + 3}{x - 3} = \frac{x^2 + x + 2x + 3}{x - 3}$$

حالا تنها کاری که باید انجام بدیم اینه که صورت کسر رو مرتب کنیم، یعنی جمع چندجمله‌ایها رو انجام بدیم، در اینجا فقط می‌تونیم x و $2x$ رو با هم جمع کنیم بنابراین داریم:

$$\frac{x^2 + x + 2x + 3}{x - 3} = \frac{x^2 + (1 + 2)x + 3}{x - 3} = \frac{x^2 + 3x + 3}{x - 3}$$

حالت دوم: مخرج کسرها برابر نیست ولی در صورتی که مخرجها رو تجزیه کنیم، جملات مشترک بین اونها رو پیدا می‌کنیم:

گام ۱: مخرج کسرها رو تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{a^2 - 20}{a^2 - 4} + \frac{a - 2}{a + 2} =$$

اگه اتحادها رو یادتون باشه، با نگاه کردن به مفرج کسر اول می فهمیم که می تونیم با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیهش کنیم:

$$a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$$

مفرج کسر دو هم که تجزیه نمیشه.

گام ۲. مفرجهای تجزیه شده رو جاگذاری می کنیم و جملات مشترک بین مفرجهای رو خط

می زنیم (توجه توجه توجه: فقط برای اینکه دچار اشتباه نشید میگم که خط بزنید، پس اینا واقعا قرار نیست خط بفورن، موقتا خط می زنیم 😊)

$$\frac{a^2 - 20}{(a - 2)(a + 2)} + \frac{a - 2}{a + 2} =$$

الان در مفرج هر دو کسر $a + 2$ داریم، پس فکشون می زنیم (توجه داشته باشید که فقط جملاتی که در مفرجهای مشترک هستن رو خط می زنیم، هیسبیج کاری با جملات مشابه صورت نداریم):

$$\frac{a^2 - 20}{(a - 2)\cancel{(a + 2)}} + \frac{a - 2}{\cancel{a + 2}} =$$

گام ۳:

هر چی که از مفرج هر کسر مونده رو در صورت کسر دیگه ضرب می کنیم، در این مرحله واسه مفرج چیزی ننویسید:

پس در اینجا مفرج کسر دو هم که هست رو در صورت کسر اول ضرب می کنیم

و مفرج کسر اول که $a - 2$ هست رو در صورت کسر دو هم:

$$\frac{1(a^2 - 20)}{1} + \frac{(a - 2)(a - 2)}{1} =$$

گام ۴. مفرج مشترک رو به دست آورده و می نویسیم. مفرج مشترک به صورت زیر به دست میاد:

در گام ۲ ما مفرجها رو تجزیه کردیم، هر چی که در تجزیه ها به دست آوردیم رو در هم ضرب می کنیم، با توجه به این نکته که جملات مشترک رو فقط یکبار می نویسیم. مثلا در این مثال تجزیه های ما به این صورت بودن:

$$(a + 2) \text{ و } (a - 2)(a + 2)$$

همه اینها رو باید در هم ضرب کنیم ولی $(a + 2)$ دو بار تکرار شده و ما فقط یک بار ضربش می کنیم، پس مفرج برابر همیشه با:

$$(a - 2)(a + 2)$$

یا :

$$(a - 2)(a + 2) = a^2 - 4$$

پس این مفرج مشترک ما همیشه، بنابراین داریم:

$$\frac{1(a^2 - 20)}{a^2 - 4} + \frac{(a - 2)(a - 2)}{a^2 - 4} =$$

گام ۵. صورتها رو با هم جمع می کنیم (هر جا هم که لازمه ضربها رو انجام میدیم):

$$\frac{1(a^2 - 20) + (a - 2)(a - 2)}{a^2 - 4} = \frac{a^2 - 20 + a^2 - 4}{a^2 - 4} = \frac{2a^2 - 24}{a^2 - 4}$$

مثال بعد:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x - y)^2}{x^4 - y^4} =$$

گام ۱: مخرج کسرها رو تجزیه می‌کنیم:

مخرج کسر اول تجزیه نمیشه، مخرج کسر دوم رو با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

گام ۲. مخرجهای تجزیه شده رو باگذاری می‌کنیم و جملات مشترک بین مخرجها رو فط

می‌زنیم:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x - y)^2}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)} =$$

گام ۳:

هر چی که از مخرج هر کسر مونده رو در صورت کسر دیگه ضرب می‌کنیم، در این مرحله

واسه مخرج چیزی ننویسیم:

$$\frac{x(x^2 - y^2)}{x(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} - \frac{y(x - y)^2}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)} =$$

گام ۴. مخرج مشترک رو به دست آورده و می‌نویسیم.

در گام ۲ ما مخرجها رو تجزیه کردیم، هر چی که در تجزیه ها به دست آوردیم رو در هم ضرب می‌کنیم، با توجه به این نکته که جملات مشترک رو فقط یکبار می‌نویسیم.

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \quad \text{و} \quad (x^2 + y^2)$$

بنابراین مخرج مشترک برابر است با:

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = x^4 - y^4$$

پس داریم:

$$\frac{x(x^2 - y^2)}{x^4 - y^4} - \frac{y(x - y)^2}{x^4 - y^4} =$$

گام ۵. صورتها رو با هم جمع می‌کنیم (هر با هم که لازمه ضربها رو انجام میدیم):

$$\frac{x(x^2 - y^2)}{x^4 - y^4} - \frac{y(x - y)^2}{x^4 - y^4} = \frac{x(x^2 - y^2) - y(x - y)^2}{x^4 - y^4} =$$

$$\frac{(x^3 - xy^2) - y(x^2 - 2xy + y^2)}{x^4 - y^4} =$$

$$= \frac{(x^3 - xy^2) - (yx^2 - 2xy^2 + y^3)}{x^4 - y^4}$$

$$= \frac{x^3 + xy^2 - yx^2 - y^3}{x^4 - y^4}$$

حالت سوم: حالتی که بعد از تجزیه هر دو مخرج، هیچ عامل مشترکی بین مفرها وجود ندارد.

برای حل این حالت بصورت زیر عمل می‌کنیم:

گام ۱. مخرج مشترک بین دو کسر رو به دست میاریم. در این حالت، مخرج مشترک برابر حاصلضرب هر دو مخرج هست.

گام ۲. مخرج هر کسر رو در صورت کسر دیگه ضرب می‌کنیم و با هم جمع (یا تفریق) می‌کنیم.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

مثال:

$$\frac{2}{x+2} - \frac{x-1}{x+4} =$$

همینطور که میبینیم مخرج این دو کسر هیچ عامل مشترکی ندارند. بنابراین:

گام ۱. مخرج مشترک بین دو کسر رو به دست میاریم. در این حالت، مخرج مشترک برابر حاصلضرب هر دو مخرج هست.

$$\frac{2}{x+2} - \frac{x-1}{x+4} = \frac{\quad}{(x+2)(x+4)}$$

گام ۲. مخرج هر کسر رو در صورت کسر دیگه ضرب می‌کنیم و با هم جمع (یا تفریق) می‌کنیم.

$$\frac{2}{x+2} - \frac{x-1}{x+4} = \frac{2(x+4) - (x+2)(x-1)}{(x+2)(x+4)}$$

حالا ساده می‌کنیم تا جواب نهایی به دست بیاد:

$$\frac{2(x+4) - (x+2)(x-1)}{(x+2)(x+4)} = \frac{2x+8 - (x^2+x-2)}{(x+2)(x+4)} =$$

$$\frac{2x+8-x^2-x+2}{(x+2)(x+4)} = \frac{-x^2+x+10}{(x+2)(x+4)}$$

حل تمرین صفحه ۱۲۳

مسابقات عبارتهای گویا

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (در همه تمرین‌ها مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است)

الف) $\frac{a^2 - 16}{a + 4} \times \frac{a + 2}{a^2 - 8a + 16}$

ب) $\frac{m^2 - 49}{m + 1} \div \frac{7 - m}{m^2 - 1}$

ج) $\frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x + 18}$

د) $\frac{1 - c^2}{b^3} \times \frac{b^2}{1 - 2c + c^2}$

الف:

صورت کسر اول رو با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$a^2 - 16 = (a - 4)(a + 4)$$

مخرج کسر دو رو با استفاده از اتحاد مربع تجزیه می‌کنیم:

$$a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2$$

باگذاری می‌کنیم:

$$\frac{a^2 - 16}{a + 4} \times \frac{a + 2}{a^2 - 8a + 16} = \frac{(a - 4)(a + 4)}{a + 4} \times \frac{a + 2}{(a - 4)^2}$$

حالا نگاه می‌کنیم ببینیم بین جملات صورت و مخرج چه جملات مشترکی وجود داره، اونا

رو ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cancel{(a - 4)}\cancel{(a + 4)}}{\cancel{a + 4}} \times \frac{a + 2}{\cancel{(a - 4)}^2} = \frac{a + 2}{a - 4}$$

ب:

صورت کسر اول رو با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$m^2 - 49 = (m - 7)(m + 7)$$

مخرج کسر دوم رو با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم

$$m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$$

$$\frac{m^2 - 49}{m + 1} \div \frac{7 - m}{m^2 - 1} = \frac{(m - 7)(m + 7)}{m + 1} \div \frac{7 - m}{(m - 1)(m + 1)} =$$

حالا باید تقسیم رو به ضرب تبدیل کنیم. برای این کار:

کسر اول رو ثابت نگه می‌داریم، تقسیم رو به ضرب تبدیل می‌کنیم و کسر دوم رو معکوس می‌کنیم:

$$\frac{(m - 7)(m + 7)}{m + 1} \div \frac{7 - m}{(m - 1)(m + 1)} = \frac{(m - 7)(m + 7)}{m + 1} \times \frac{(m - 1)(m + 1)}{7 - m} =$$

جملات مشترک در صورت و مخرج رو ساده می‌کنیم.

آه از $7 - m$ به منفی فکتور بگیریم، با یکی از جملات صورت مساوی میشه و می‌تونیم ساده‌ش کنیم:

$$\frac{\cancel{(m - 7)}(m + 7)}{m + 1} \times \frac{(m - 1)\cancel{(m + 1)}}{-(m - 7)} = \frac{(m + 7)(m - 1)}{-1}$$

ج: عبارت‌های صورت و مخرج رو تجزیه می‌کنیم:

صورت کسر اول رو با استفاده از اتحاد مربع تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

در مخرج کسر اول از $4xy$ فاکتور می‌گیریم:

$$4x^2y - 8xy = 4xy(x - 2)$$

صورت کسر دوم رو با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

در مخرج کسر دوم از عدد 6 فاکتور می‌گیریم:

$$6x + 18 = 6(x + 3)$$

باگذاری می‌کنیم:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x + 18} = \frac{(x - 2)^2}{4xy(x - 2)} \div \frac{(x + 3)(x - 2)}{6(x + 3)}$$

تقسیم رو به ضرب تبدیل می‌کنیم و جملات مشترک رو ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x - 2)^2}{4xy(x - 2)} \div \frac{(x + 3)(x - 2)}{6(x + 3)} = \frac{\cancel{(x - 2)^2}}{4xy\cancel{(x - 2)}} \times \frac{\cancel{6}\cancel{(x + 3)}}{\cancel{(x + 3)}\cancel{(x - 2)}}$$

$$= \frac{6}{4xy} = \frac{3}{2xy}$$

∴

صورت کسر اول رو با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$1 - c^2 = (1 - c)(1 + c)$$

مخرج کسر دوم رو با استفاده از اتحاد مربع تجزیه می‌کنیم:

$$1 - 2c + c^2 = (1 - c)^2$$

باگذاری می‌کنیم و جملات مشترک در صورت و مخرج رو ساده می‌کنیم:

$$\frac{1 - c^2}{b^3} \times \frac{b^2}{1 - 2c + c^2} = \frac{(1 - c)(1 + c)}{b^3} \times \frac{b^2}{(1 - c)^2} = \frac{1 + c}{b(1 - c)}$$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4 - y^4}$

ب) $\frac{x+7}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay}$

ج) $\frac{a^2 - b^2}{a-b} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2}$

د) $\frac{4+x^2-2x}{2+x} - 2-x$

الف:

مخرج کسر دوم رو تجزیه می‌کنیم تا بتونیم مخرج مشترک رو تشخیص بدیم:

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

همین عبارت رو به عنوان مخرج مشترک انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x-y)^2}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)} &= \\ &= \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)} - \frac{y(x-y)^2}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)} = \\ &= \frac{x(x^2 - y^2) - y(x-y)^2}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)} \end{aligned}$$

عبارت $x^2 - y^2$ در صورت رو تجزیه می‌کنیم:

$$= \frac{x(x-y)(x+y) - y(x-y)^2}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}$$

حالا از $x-y$ در صورت فاکتور می‌گیریم:

$$= \frac{(x-y)[x(x+y) - y(x-y)]}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)} = \frac{(x-y)[x^2 + xy - xy + y^2]}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}$$

$$= \frac{(x-y)[x^2+y^2]}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} = \frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x+y}$$

ج:

مخرج کسر دوم، رو تجزیه می‌کنیم تا راحت‌تر بتونیم مخرج مشترک رو تشخیص بدیم:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

همین عبارت رو به عنوان مخرج مشترک انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{a-b} - \frac{a^3 - b^3}{(a-b)(a+b)} &= \\ &= \frac{(a^2 - b^2)(a+b)}{(a-b)(a+b)} - \frac{a^3 - b^3}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 - a^3 + b^3}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2b - ab^2}{(a-b)(a+b)} \end{aligned}$$

از ab توی صورت فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{a^2b - ab^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{ab(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$$

د:

مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{4 + x^2 - 2x}{2+x} - 2 - x =$$

برای اینکه توی مقادیرمون به اشتباه نیفتیم، علامت منفی رو در قسمت دوم فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{4 + x^2 - 2x}{2 + x} - (2 + x) = \frac{4 + x^2 - 2x}{2 + x} - \frac{(2 + x)^2}{2 + x}$$

$$= \frac{4 + x^2 - 2x - 4 - 4x - x^2}{2 + x} = \frac{-6x}{2 + x}$$

۳- فقط یکی از عبارت‌های گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$$\frac{a^2 + 5}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2 + 3}{3} \quad \text{و} \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2 - 5a}{a}$$

$$\frac{a^2 - 5a}{a} = \frac{a(a - 5)}{a} = a - 5$$

۴- از میان عبارت‌های زیر، هر کدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

$$\text{الف) } \frac{x+3}{y+3} \quad \text{ب) } \frac{3-x}{3-y} \quad \text{ج) } \frac{3x}{3y} \quad \text{د) } \frac{x^2}{y^2} \quad \text{ه) } \frac{a^2 x}{a^2 y}$$

گزینه‌های ج و ه :

$$\frac{3x}{3y} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{a^3 x}{a^3 y} = \frac{x}{y}$$

۵- عبارت $\frac{-x+3}{x+5}$ با کدام یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

$$\text{الف) } -\frac{x+3}{x+5} \quad \text{ب) } -\frac{x-3}{x+5} \quad \text{ج) } \frac{x-3}{x+5} \quad \text{د) } -\frac{3-x}{x+5}$$

مفرج همه کسر ها با هم برابر، پس باید بینیم صورت کدوم کسر برابر $3 - x$ هست.

الف:

علامت منفی پشت کسره، پس در هر دو عدد صورت ضرب میشه، یعنی در این گزینه صورت کسر برابر میشه با $3 - x$

ب:

علامت منفی پشت کسره، پس در هر دو عدد صورت ضرب میشه، یعنی در این گزینه صورت کسر برابر میشه با $3 + x$

پس این کسر با کسر داده شده در صورت سوال برابر.

ج:

این کسر برابر نیست.

د:

علامت منفی پشت کسره، پس در هر دو عدد صورت ضرب میشه، یعنی در این گزینه صورت کسر برابر میشه با $3 + x$

۶- کدام یک از عبارتهای زیر به درستی ساده شده است؟

$$\text{الف) } \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5 \quad \text{ب) } \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$$

گزینه ب درست ساده شده.

بعد از ساده کردن عبارتهای مشترک در صورت و مخرج، چیزی که باقی می‌ماند عبارت
 $a - 5$ هست که در مخرج وجود دارد.

۷- اگر $A = a^2 - b^2$ و $B = a^2 + b^2$ و $C = 2ab$ ، حاصل عبارت $\frac{A^2 - B^2}{C^2}$ را به دست آورید.

برای اینکه راحت‌تر بتوانیم مقاسبات رو انجام بدیم، ابتدا صورت کسر رو با استفاده از
 اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم تا حاصل به دست بیاد:

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

$$(A + B) = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) = a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 2a^2$$

$$(A - B) = a^2 - b^2 - (a^2 + b^2) = a^2 - b^2 - a^2 - b^2 = -2b^2$$

جاگذاری می‌کنیم:

$$\frac{A^2 - B^2}{C^2} = \frac{(A + B)(A - B)}{C^2} = \frac{(2a^2)(-2b^2)}{4a^2b^2} = \frac{-4a^2b^2}{4a^2b^2} = -1$$

۸- کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام یک نادرست است؟ موارد نادرست را اصلاح

کنید. (همه عبارتهای جبری تعریف شده فرض می‌شود).

الف) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$

ب) $\frac{x^{13}}{x^{20}} = x^7$

ج) $\frac{a}{5} - \frac{v-b}{5} = \frac{a-v-b}{5}$

د) $\frac{a-b}{b-a} = 1$

ه) $\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b}$

و) $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$

ز) $\frac{ca + cb}{c + cd} = \frac{a + b}{d}$

ح) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{b}$

الف: نادرست

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$$

ب: نادرست

$$\frac{x^{13}}{x^{20}} = \frac{1}{x^{20-13}} = \frac{1}{x^7} = x^{-7}$$

ج: نادرست

علامت منفی که پشت کسر دوم قرار گرفته باید در همه اعداد صورت ضرب بشه، نه فقط عدد اولی

$$\frac{a}{5} - \frac{7-b}{5} = \frac{a-7+b}{5}$$

د: نادرست

کسر در صورتی با ۱ برابره که صورت و مخرج با هم برابر باشن، ولی در اینجا صورت و مخرج قرینه هستن.

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{a-b}{-(a-b)} = -1$$

ه: نادرست

صورت در علامت منفی ضرب شده، برای اینکه تساوی برقرار بمونه باید مخرج رو هم در علامت منفی ضرب کنیم؛

$$\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{-a+b} = \frac{-1}{b-a}$$

و: درست

صورت با استفاده از اتحاد مزدوج ساده شده و عبارت‌های مشابه، ساده شدن:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b)}{a - b} = a + b$$

ز: نادرست

از صورت و مخرج c، رو فاکتور می‌گیریم و با هم ساده می‌کنیم:

$$\frac{ca + cb}{c + cd} = \frac{c(a + b)}{c(1 + d)} = \frac{a + b}{1 + d}$$

ح: درست

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{ac}{ab} = \frac{c}{b}$$

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.

عرض مستطیل رو با x نشون میدیم. بنابراین طول مستطیل برابره با:

$$2x - 1$$

محیط مستطیل برابره با:

$$p = 2(\text{طول} + \text{عرض}) = 2(2x - 1 + x) = 6x - 2$$

مساحت مستطیل برابره با:

$$s = \text{طول} \times \text{عرض} = (2x - 1)x = 2x^2 - x$$

بنابراین نسبت محیط به مساحت مستطیل برابره با:

$$\frac{\text{معیط}}{\text{مقامت}} = \frac{6x - 2}{2x^2 - x}$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{\frac{a - a^2}{a^2 - 1}}{\frac{a}{a + 1} - a}$$

$$\text{ب) } \frac{\frac{1}{x - y} - \frac{2}{x + y}}{\frac{x^2 - 9y^2}{(x - y)^2}}$$

الف:

ابتدا صورت رو ساده می‌کنیم.

صورت کسر هم فودش یه کسره، صورتش رو با فاکتورگیری و مفریش رو با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{a - a^2}{a^2 - 1} = \frac{-a(a - 1)}{(a + 1)(a - 1)} = \frac{-a}{a + 1}$$

حالا مفرج کسر رو ساده می‌کنیم، باید مفرج مشترک بگیریم:

$$\frac{a}{a + 1} - a = \frac{a}{a + 1} - \frac{a(a + 1)}{a + 1} = \frac{a - a^2 - a}{a + 1} = \frac{-a^2}{a + 1}$$

باگذاری می‌کنیم:

$$\frac{\frac{a - a^2}{a^2 - 1}}{\frac{a}{a + 1} - a} = \frac{\frac{-a}{a + 1}}{\frac{-a^2}{a + 1}} =$$

دور در دور ، نزدیک در نزدیک می‌کنیم:

$$\frac{\frac{-a}{a+1}}{\frac{-a^2}{a+1}} = \frac{-a(a+1)}{-a^2(a+1)} = \frac{1}{a}$$

ب:

ابتدا حاصل صورت رو به دست میاریم، باید بین دو کسر مخرج مشترک بگیریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y} &= \frac{1(x+y)}{(x-y)(x+y)} - \frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x+y-2x+2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{-x+3y}{(x-y)(x+y)} \end{aligned}$$

حاصل مخرج رو به دست میاریم، صورت رو با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{x^2 - 9y^2}{(x-y)^2} = \frac{(x-3y)(x+3y)}{(x-y)^2}$$

خب اینجا چیزی توی صورت و مخرج مشترک نیست که بتونیم ساده‌ش کنیم.

عبارت‌های به دست اومده رو بایگنیزین می‌کنیم:

$$\frac{\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y}}{\frac{x^2 - 9y^2}{(x-y)^2}} = \frac{\frac{-x+3y}{(x-y)(x+y)}}{\frac{(x-3y)(x+3y)}{(x-y)^2}}$$

دور در دور ، نزدیک در نزدیک می‌کنیم:

$$\frac{(-x+3y)(x-y)^2}{(x-y)(x+y)(x-3y)(x+3y)} =$$

عبارت $(x - y)$ در صورت و مخرج مشترک و با هم ساده میشن

آه از $(-x + 3y)$ یه منفی رو فاکتور بگیریم، با $(x - 3y)$ در مخرج ساده میشه :

$$\frac{(-x + 3y)(x - y)^2}{(x - y)(x + y)(x - 3y)(x + 3y)} = \frac{-(x - y)}{(x + y)(x + 3y)}$$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که :

الف) حاصل ضرب آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود.

ب) حاصل جمع آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود.

الف:

$$\frac{1}{a+7} \times \frac{a-2}{1} = \frac{a-2}{a+7}$$

ب:

$$\frac{a}{a+7} + \frac{-2}{a+7} = \frac{a-2}{a+7}$$

۱۲- عرض مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$$

مساحت مستطیل $x^2 - 9$ است.

$$A = x^2 - 9$$

مساحت مستطیل از چه راهی به دست میار؟ طول \times عرض

در اینجا طول و مساحت رو داریم و می‌فوییم عرض رو به دست بیاریم. برای به دست آوردن عرض مستطیل، باید مساحت رو بر طول تقسیم کنیم:

$$x^2 - 9 \div \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} =$$

عبارت‌ها رو تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

جاگذاری و ساده می‌کنیم:

$$(x - 3)(x + 3) \div \frac{(x - 4)(x + 3)}{x - 4} =$$

تقسیم رو به ضرب تبدیل می‌کنیم و با ساده کردن جملات مشترک، جواب رو به دست می‌آریم:

$$(x - 3)(x + 3) \times \frac{x - 4}{(x - 4)(x + 3)} = x - 3$$

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های [@RiaziBaHam](https://www.instagram.com/RiaziBaHam) و [@RiaziBaHam9](https://www.instagram.com/RiaziBaHam9)

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرین‌های حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.